Содержание

1. Язык кванторов

1.1. Понятие кванторов и их использование

Примерно с середины XX-го века в математическую литературу и учебники вошли новые символы – «кванторы». Их миссией было сокращения записи утверждений и определений, а также превращение их записи в максимально ясный[1] и однозначно понимаемый текст.

Изначально эти символы появились в математической логике и носили только узкоспециальный смысл. Затем математики заметили их удобство и перевели их в ранг общеупотребимых.

Привыкание к этому языку требует некоторого времени. Но кванторы уже применяются как совершенно общепринятые и всем понятные символы, а кроме того, получаемое удобство и компактность записи сто́ят затраченных на знакомство с кванторами усилий.

Опр. 1.1. **Кванторами** называются символы $\forall$ и $\exists$, являющиеся сокращением[2]для

$$\begin{array}{lll} \forall & - & \text{«для любого»,\ «для каждого»,\ «для всех»;} \\ \exists & - & \text{«существует»,\ «найдётся».} \end{array}$$

[1]При наличии некоторого навыка...

[2] $\forall$ – есть первая перевёрнутая буква английского слова "Any";
$\exists$ – есть первая перевёрнутая буква английского слова "Exists".

Помимо кванторов и вместе с ними часто используются символы $!$, $:$ и $|$, являющиеся сокращением для

$$\begin{array}{ccl} ! & – & \text{«единственный»;} \\ : & – & \text{«такой, что»;} \\ | & – & \text{«такой, что».} \end{array}$$

При этом «:» используется, как правило, в формулировках определений и теорем, записываемх при помощи кванторов, например, в определении предела последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N \in \mathbb{N}:\quad \forall\, n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - A| < \varepsilon.$$

(читается: «для любого ε, большего нуля, существует натуральное n такое, что для всех n, больших N, выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$.»)

В то же время, знак «$|$» применятся в определениях множеств, например:

$$M = \{f(x) \mid\ f(a) = 0\}$$

(«Множество M состоит из всех таких фукнций $f(x)$, которые в точке a обращаются в 0.»)

В качестве примера приведём несколько определений.

Пример 1.1. *Прочитать определения и осознать их смысл:*

1) Функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a,\ b]$, называется **ограниченной на** $[a,\ b]$, если

$$\exists\ M > 0:\quad \forall\, x \in [a,\ b] \quad \Longrightarrow \quad |f(x)| < M.$$

2) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным сверху**, если

$$\exists\ M \in \mathbb{R}:\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x < M.$$

3) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным снизу**, если

$$\exists\ M \in \mathbb{R}:\quad \forall\ \ x \in D \quad \Longrightarrow \quad x > M.$$

4) Множество D точек числовой прямой $\mathbb{R} = (-\infty,\ +\infty)$ называется **ограниченным**, если

$$\exists\ M > 0:\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad |x| < M.$$

5) Число s называется **точной нижней гранью числового множества** $D \subset \mathbb{R}$ и обозначается $s = \inf D$, если

I) $\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \geqslant s;$

II) $\quad \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, a \in D:\quad a < s + \varepsilon.$

6) Число S называется **точной верхней гранью числового множества** $D \subset \mathbb{R}$ и обозначается $S = \sup D$, если

I) $\quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant S;$

II) $\quad \forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, b \in D:\quad b > S - \varepsilon.$

7) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно возрастающей**, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n < a_{n+1}.$$

8) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно убывающей**, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n > a_{n+1}.$$

9) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно неубывающей**, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

10) Последовательность $\{a_n\}$ называется **монотонно невозрастающей**, если

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Пример 1.2. *Прочитать высказывания и осознать их смысл:*

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad a_n > 0.$

б) $\exists\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad a_n > 0.$

в) $\exists\, M > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

Пример 1.3. *Записать высказывания на языке кванторов:*

а) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена сверху.

б) Функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,\ b]$.

в) Функция $f(x)$ невозрастает[1] на отрезке $[a,\ b]$.

1.2. Отрицание суждений, записанных в кванторах

Пример 1.4. *Написать отрицание:*

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} > a_n$ (последовательность возрастает).

б) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k > n: \quad a_k = 0$ (у последовательности есть нулевые элементы со сколь угодно большими номерами).

в) $\forall\ \varepsilon > 0 \quad \exists\ n \in \mathbb{N}: \quad \forall\ k > n \quad \Longrightarrow \quad |a_k| < \varepsilon$ (последовательность стремится к нулю).

г) $\exists\, M > 0: \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad |a_n| < M$ (последовательность ограничена).

[1] Напоминаем, что «невозрастает» означает «является невозрастающей», в то время как «не возрастает» означает «не является возрастающей», – и это **р а з н ы е** понятия!

а) Найдём логическую структуру исходного суждения:

$$\underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{a_{n+1} > a_n}_{B.}$$

Так как отрицанием суждения $A \Rightarrow B$ является суждение $\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B$, а

$$\mathfrak{I}\, A = \bigl(\exists\, n \in \mathbb{N}\bigr), \qquad \neg B = \Bigl(a_{n+1} \leqslant a_n\Bigr),$$

то отрицание исходного суждения имеет вид:

Ответ: $\exists\, n \in \mathbb{N}: \quad a_{n+1} \leqslant a_n$. (последовательность не является возрастающей[1]).

б) Логическая структура исходного суждения такова:

$$\underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N}}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Bigl(\underbrace{\exists\, k > n:}_{\mathfrak{I}C} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{a_k = 0}_{D}\Bigr).}_{B}$$

Так как отрицанием суждения $A \Rightarrow B$ является суждение $\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B$, нам надо выяснить, что же такое $\mathfrak{I}\, A$ и $\neg B$. Как и в пункте а),

$$\mathfrak{I}\, A = \bigl(\exists\, n \in \mathbb{N}\bigr),$$

а вот $\neg B = \neg\Bigl(\mathfrak{I}\, C \Rightarrow D\Bigr)$, по правилу отрицания суждения, есть

$$\neg B = \Bigl(C \Rightarrow \neg D\Bigr).$$

Итак, отрицание исходного суждения имеет логическую схему:

$$\underbrace{\exists\, n \in \mathbb{N}:}_{\mathfrak{I}\,A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Bigl(\underbrace{\forall\, k > n}_{C} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{a_k \neq 0}_{\neg D}\Bigr).}_{\neg B}$$

Ответ: начиная с некоторого номера, а именно с $n+1$, все элементы последовательности отличны от нуля:

$$\exists\, n \in \mathbb{N}: \qquad \forall\, k > n \qquad a_k \neq 0.$$

в) Логическая структура исходного суждения

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n \in \mathbb{N}: \quad \forall\, k > n \quad \Longrightarrow \quad |a_k| < \varepsilon$$

почти такая же, как в п. б), то есть $A \Rightarrow \Bigl(\mathfrak{I}\, C \Rightarrow (E \Rightarrow F)\Bigr)$:

$$\underbrace{\forall\, \varepsilon > 0}_{A} \quad \Longrightarrow \quad \Bigl(\underbrace{\exists\, n \in \mathbb{N}:}_{\mathfrak{I}C} \quad \Longrightarrow \quad (\underbrace{\forall\, k > n}_{E} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|a_k| < \varepsilon}_{F}.)\Bigr)$$

[1]Ещё раз обратим внимание, что **понятия «невозрастает» и «не является возрастающей» имеют разный смысл!** Сравните полученное суждение с п. 10 примера 1.1.

Если для простоты обозначить через D внутренние скобки

$$D = (E \Rightarrow F),$$

то схема исходного суждения совпадёт со схемой суждения из п. б): $A \Rightarrow \Bigl(\Im\, C \Rightarrow D\Bigr)$. Поэтому отрицание получается аналогично:

$$\Im\, A \Rightarrow (C \Rightarrow \neg D),$$

единственное, что здесь нужно уточнить, это вид суждения $\neg D$. По правилам отрицания (см. таблицу на стр. 3 семинара № 2),

$$\neg D \;=\; \neg(E \Rightarrow F) \;=\; (\Im\, E \Rightarrow \neg F).$$

Осталось найти $\neg F$. Так как сам термин F – сложный, ведь он содержит два неравенства, выполняющихся одновременно:

$$F: \qquad \begin{cases} a_k > -\varepsilon, \\ a_k < \varepsilon, \end{cases}$$

то его отрицание надо строить как отрицание сложного термина (см. пункт д. Примера 1.2 семинара № 2, а также таблицу на стр. 3 семинара № 2[1]:

$$\neg F: \qquad \left[\begin{array}{l} a_k \leqslant -\varepsilon, \\ a_k \geqslant \varepsilon. \end{array} \right.$$

Ответ: существует такая окрестность нуля, что найдутся элементы последовательности со сколь угодно большими номерами, лежащие вне этой окрестности:

$$\exists\, \varepsilon > 0: \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, k > n: \qquad \left[\begin{array}{l} a_k \leqslant -\varepsilon, \\ a_k \geqslant \varepsilon. \end{array} \right.$$

г) Логическая структура исходного суждения

$$\underbrace{\exists\, M > 0:}_{\Im\, A} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\Bigl(\underbrace{\forall\, n \in \mathbb{N}}_{C} \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{|a_n| < M}_{D}\Bigr)}_{B}$$

подобна схеме суждения из п. б), только A превратилось в $\Im\, A$, а $\Im\, C$ – наоборот в C. Так как отрицанием суждения $\Im\, A \Rightarrow B$ является суждение $A \Rightarrow \neg B$, нам надо выяснить, что же такое $\neg B$. По правилу отрицания суждения $\neg B = \neg\Bigl(C \Rightarrow D\Bigr)$, есть

$$\neg B = \Bigl(\Im\, C \Rightarrow \neg D\Bigr).$$

Итак, отрицание исходного суждения имеет логическую схему:

$$A \Rightarrow \Bigl(\Im\, C \Rightarrow \neg D\Bigr).$$

[1] Напомним, что фигурная скобка означает «и», а квадратная – «или», см. замечание 1.1 семинара № 1.

Выясним, что такое $\neg D$. Так как сам термин F – сложный, ведь он содержит два неравенства, выполняющиеся одновременно:

$$D: \qquad \begin{cases} a_n > -M, \\ a_n < M, \end{cases}$$

то его отрицание надо строить как отрицание сложного термина, подобно $\neg F$ в п.в):

$$\neg D: \qquad \left[\begin{array}{l} a_n \leqslant -M, \\ a_n \geqslant M. \end{array} \right.$$

Таким образом, схема $A \Rightarrow \Big(\mathfrak{I}\, C \Rightarrow \neg D\Big)$ принимает вид:

Ответ: последовательность неограничена, т.е. найдутся элементы последовательности со сколь угодно большими номерами, по модулю превосходящие любое наперёд заданное число M:

$$\forall\, M > 0: \qquad \exists\, n \in \mathbb{N}: \qquad \left[\begin{array}{l} a_n \leqslant -M, \\ a_n \geqslant M. \end{array} \right.$$

Приведённый пример иллюстрирует простое правило, по которому можно практически без усилий строить отрицания высказываний на языке кванторов:

Правило построения отрицаний.

Все кванторы надо поменять на проивоположные $\Big(\forall \leftrightarrow \exists\Big)$, а последнее неравенство заменить на противоположное.

Более точно, пусть дано высказывание, состоящее из цепочки терминов вида $\forall\, S$ и $\exists\, P$ и заключительного высказывания R. Тогда отрицание строится по алгоритму:

1. Всюду, кроме R, символы $\forall$ меняются на $\exists$, а символы $\exists$ – на $\forall$;

2. После новых символов $\forall$ убираются двоеточия «:», а после новых $\exists$ ставятся двоеточия «:»;

3. Все логические «**и**» заменяются на логические «**или**», а логические «**или**» – на логические «**и**».

4. Если перед R стоит $\forall\, S$, то между ними ставится знак $\Longrightarrow$, если же перед R стоит $\exists\, S$:, то знак $\Longrightarrow$ между ними убирается;

5. К высказыванию R строится отрицание, причём если R – суждение, то к R применяем тот же агоритм, начиная с пункта 1., а если термин, то строим отрицание по правилу отрицания терминов, стр. 3 семинара № 2.

Пример 1.5. *Построить отрицание:*

$$\forall\, a \in \mathbb{R} \qquad \exists\, b \in \mathbb{Q}: \qquad \left[\begin{array}{l} \forall\, x > b \quad \Longrightarrow \quad f(x) > a; \\ \\ \exists\, n \in \mathbb{N}: \qquad \begin{cases} f(b^n) \leqslant a; \\ b \cdot n \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Не вникая в смысл данного высказывания, а пользуясь только правилом построения отрицаний, получаем:

$$\exists\, a \in \mathbb{R}: \qquad \forall\, b \in \mathbb{Q} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{ll} \exists\, x > b: & f(x) \leqslant a; \\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow & \left[\begin{array}{l} f(b^n) > a; \\ b \cdot n \notin \mathbb{Z}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Пример 1.6. *Построить отрицание ко всем пунктам примера 1.1, стр. 2 и вникнуть в смысл.*

Пример 1.7. *Построить отрицание к суждениям и осознать разницу между понятиями* inf *и* min*:*

1) $s = \inf D$:

$$\begin{array}{lll} \textbf{I)} & \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow & x \geqslant s; \\ \textbf{II)} & \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, a \in D: & a < s + \varepsilon. \end{array}$$

2) $m = \min\limits_{x \in [a,\, b]} f(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \forall\, x \in [a,\ b], & \Longrightarrow & f(x) \geqslant m; \\ \exists x_0 \in [a,\ b]: & & f(x_0) = m. \end{array} \right.$$

2. Доказательство «в лоб» и доказательство «от противного»

2.1. Алгоритм

Здесь мы рассмотрим две основные логичесике конструкции, используемые для доказательства утверждений.

- **Доказательство «в лоб»** состоит в том, что из известных определений, аксиом, уже доказанных теорем, а также посылок, данных в условии теоремы, поледовательным применением силлогизмов выводится то суждение, которое требовалось доказать.[1]
- **Доказательство «от противного»** состоит в том, что
  1) предполагается, что справедливо **отрицание** суждения, которое требовалось доказать (предположение «противного»);
  2) из этого отрицания, из известных определений, аксиом, уже доказанных теорем, а также некоторых посылок, данных в условии теоремы, поледовательным применением силлогизмов выводится суждение, **противоречащее** неиспользованной посылке в условии теоремы.[2]

[1] При этом все промежуточные суждения являются истинными в данной системе аксиом.

[2] При этом вывод происходит от ложной посылки к ложному следствию, и многие промежуточные суждения являются ложными в данной системе аксиом.

Для примера введём определение и докажем двумя способами теорему.

Опр. 2.1. **Человеком** называется двуногое существо без перьев[1].

Опр. 2.2. **Птицей** называется двуногое существо с перьями.

Аксиома 1. Птицы умеют летать.

Теорема 2.1.

Усл. *У Васи две ноги. Вася не умеет летать.*

Утв. *Вася – человек.*

Обозначим:

- A – «иметь перья»;
- B – «быть двуногим»;
- C – «быть птицей»;
- D – «быть человеком»;
- E – «уметь летать»;
- F – «Вася».

В этих обозначениях определения, аксиома и теорма принимают вид:

Опр. 2.1

$$D \quad \Leftrightarrow \quad \big(\neg A \text{ и } B\big).$$

Опр. 2.2

$$C \quad \Leftrightarrow \quad \big(A \text{ и } B\big).$$

Аксиома 1

$$C \;\Rightarrow\; E.$$

Теорема 2.1

Усл. $\big(F \Rightarrow B\big)$ **и** $\big(F \Rightarrow \neg E\big)$.

Утв. $F \quad \Longrightarrow \quad D.$

Теперь докажем теорему 2.1 сначала «в лоб», а затем «от противного».

[1] *«Когда Платон дал определение, имевшее большой успех: "Человек есть животное о двух ногах, лишенное перьев Диоген (Синопский) ощипал петуха и принес к нему в школу, объявив: "Вот платоновский человек!"После этого к определению было добавлено: "И с широкими ногтями".»* Диоген Лаэртский «О жизни, учениях и изречениях знаменитых философов».
Окончательный вариант определения Платона: *«Человек – существо бескрылое, двуногое, с плоскими ногтями; единственное из существ, восприимчивое к знанию, основанному на рассуждениях.»*

2.2. Доказательство «в лоб»

Из второго условия теоремы получаем:

$$(F \Rightarrow \neg E) \underset{\text{mod. tollens}}{\overset{\text{Аксиома}}{\Longrightarrow}} (F \Rightarrow \neg C) \overset{\text{Опр. 2.2}}{\Longrightarrow} \big(F \Rightarrow (\neg A \ \textbf{или} \ \neg B)\big).$$

Но первое условие теоремы $F \Rightarrow B$ говорит нам, что $\neg B$ для Васи ложно, поэтому полученное суждение $\big(F \Rightarrow (\neg A \ \textbf{или} \ \neg B)\big)$ превращается в $(F \Rightarrow \neg A)$:

$$\left.\begin{array}{r} F \Rightarrow (\neg A \ \textbf{или} \ \neg B) \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} \Longrightarrow (F \Rightarrow \neg A).$$

Осталось немного:

$$\left.\begin{array}{r} F \Rightarrow \neg A \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} = \big(F \Rightarrow (\neg A \ \textbf{и} \ B)\big) \overset{\text{Опр. 2.1}}{\Longrightarrow} (F \Rightarrow D),$$

что и требовалось доказать.

Отличительной чертой доказательства «в лоб» является то, что логический вывод происходит из известных фактов, а затем из их следствий, то есть всё время **от истинных выказываний к истинным высказываниям**, пока не будет получено утверждение теоремы.

2.3. Доказательство «от противного»

Шаг 1. Предположение «противного». Пусть не выполнено утверждение теоремы, то есть справедливо (по правилу отрицания суждений, стр. 3 семинара № 2, что

$$\mathfrak{I} F \Rightarrow \neg D.$$

Учитывая, что Вася – неделимый объект, который не может быть частично птицей, а частично – человеком, мы можем в дальнейшем всюду заменить $\mathfrak{I} F$ на F. Тогда отрицанием утверждения теоремы (с учётом Васиной природы) будет суждение

$$F \Rightarrow \neg D. \tag{2.1}$$

Шаг 2. Получение противоречия. Из предположения, что «Вася – не человек», получаем

$$\left.\begin{array}{r} F \Rightarrow \neg D \underset{\text{modus tollens}}{\overset{\text{Опр. 2.1}}{\Longrightarrow}} F \Rightarrow (A \ \textbf{или} \ \neg B) \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} \Longrightarrow F \Rightarrow A,$$

то есть, что «Вася имеет перья». Тогда

$$\left.\begin{array}{r} F \Rightarrow A \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} \overset{\text{Опр. 2.2}}{\Longrightarrow} F \Rightarrow C,$$

«Вася – птица». Из аксиомы получаем:

$$F \Rightarrow C \overset{\text{Аксиома}}{\Longrightarrow} F \Rightarrow E,$$

что «Вася умеет летать», что **противоречит** условию теоремы

$$F \Rightarrow \neg E.$$

о том, что Вася не умеет летать.

Шаг 3. Заключение о невозможности «противного». Поскольку, исходя из предположения, сделанного на Шаге 1., а также заведомо верных условий теоремы, аксиомы и определений, мы не нарушая законов логики, пришли к противоречию, значит наше препоположение, сделанное на Шаге 1., было неверно.

Но это предположение состояло в том, что неверно утверждение теоремы. Следовательно, утверждение теоремы верно, что и требовалось доказать. Доказательство закончено.

Итак, всё доказательство «от противного» нашей теоремы имеет схему:
предположим противное: $F \Rightarrow \neg D$, *тогда*

$$F \Rightarrow \neg D \quad \xRightarrow[\text{modus tollens}]{\text{Опр. 2.1}} \quad \left.\begin{array}{r} F \Rightarrow (A \ \textbf{или}\ \neg B) \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} F \Rightarrow A \\ F \Rightarrow B \end{array}\right\} \quad \xRightarrow{\text{Опр. 2.2}}$$

$$\xRightarrow{\text{Опр. 2.2}} \quad F \Rightarrow C \quad \xRightarrow[\text{modus tollens}]{\text{Аксиома}} \quad F \Rightarrow E,$$

что противоречит условию $F \Rightarrow \neg E$ *теоремы.*

Здесь цветом выделены ложные суждения, начиная с отрицания условия и кончая заключением $F \Rightarrow E$, противоречащим условию теоремы.

Отличительной чертой доказательства «от противного» является то, что логический вывод в первую очередь из происходит **ложного высказывания о неверности утверждения теоремы** и из известных фактов, а затем из полученных следствий, то есть всё время **от ложных выказываний к ложным высказываниям**[1], пока не получится явного противоречия с условием теоремы или другим известным истинным суждением.

3. Упражнения

Пример 3.1. *Прочитать высказывания и осознать их смысл:*

а) $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \exists\, M > 0 : \quad |a_n| < M.$

б) $\forall\, M > 0 : \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

в)* $\forall\, M > 0 : \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

г) $\exists\, n \in \mathbb{N} : \quad \forall\, M > 0 \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

д) $\exists\, M > 0 : \quad \exists\, n \in \mathbb{N} : \quad \Longrightarrow \quad |a_n| < M.$

[1] Пока противоречие не получено, мы ещё не знаем, являются ли эти суждения ложными, и всё доказательство проводится **в предположении, что основная посылка** (а значит и следствия из неё) **является истинной**. Ложными все эти суждения оказываются, если удастся получить противоречие.

Пример 3.2. *Записать высказывания на языке кванторов:*

а) Последовательность $\{a_n\}$ ограничена снизу.

б) Функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a,\ b]$.

в) Функция $f(x)$ неубывает[1] на отрезке $[a,\ b]$.

г)* $\sup\{a_n\} = A$.

д)* $\inf\{a_n\} = a$.

Пример 3.3. *Построить отрицание ко всем пунктам примера 1.1, стр. 2 и вникнуть в смысл:*

1) Множество $D \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху:
$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x < M.$$

2) Множество $D \subset \mathbb{R}$ ограничено снизу:
$$\exists\, M \in \mathbb{R}: \quad \forall\ x \in D \quad \Longrightarrow \quad x > M.$$

3) Множество $D \subset \mathbb{R}$ ограничено:
$$\exists\, M > 0: \quad \forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad |x| < M.$$

4) $S = \sup D$:

I) $\forall\, x \in D \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant s;$

II) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, b \in D: \quad b > S - \varepsilon.$

5) $\{a_n\}$ монотонно возрастает:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n < a_{n+1}.$$

6) $\{a_n\}$ монотонно убывает:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n > a_{n+1}.$$

7) $\{a_n\}$ монотонно неубывает:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \leqslant a_{n+1}.$$

8) $\{a_n\}$ монотонно невозрастает:
$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \Longrightarrow \quad a_n \geqslant a_{n+1}.$$

Пример 3.4. *Доказать теорему в лоб и от противного:*

Опр. 3.1.
Студент – неплохой, если он сдал сессию. $\quad (A \Leftarrow B)$

Аксиома 2.
Чтобы учиться на втором курсе, необходимо и достаточно сдать две сессии. $(C \Leftrightarrow D, \quad D \Rightarrow B)$

[1] Напоминаем, что «неубывает» означает «является неубывающей», в то время как «не убывает» означает «не является убывающей», – и это **р а з н ы е** понятия!

Теорема 3.1.

Усл. *Студент Вася учится на втором курсе.* $(E \Rightarrow C)$

Утв. *Вася – неплохой студент.* $(E \Rightarrow A)$

В лоб:

$$(E \Rightarrow C) \overset{\text{Аксиома}}{\Longrightarrow} (E \Rightarrow B) \overset{\text{Опр.}}{\Longrightarrow} (E \Rightarrow A).$$

От противного: Пусть $E \Rightarrow \neg A$[1].
Тогда:

$$(E \Rightarrow \neg A) \underset{\text{mod. tollens}}{\overset{\text{Опр.}}{\Longrightarrow}} (E \Rightarrow \neg B) \underset{\text{mod. tollens}}{\overset{\text{Аксиома}}{\Longrightarrow}} (E \Rightarrow \neg C),$$

что противоречит условию теоремы $(E \Rightarrow C)$.

Пример 3.5. *Найти ошибки в доказательстве.*

Парадокс Зенона об Ахиллесе и черепахе

Теорема 3.2.

Утв. *Движения не существует в природе.*

Доказательство.
Шаг 1. Предположение «противного». Предположим, что движение в природе существует.
Шаг 2. Логические построения. Рассмотрим соревнования по бегу между быстроногим Ахиллесом и черепахой. Пусть между ними в момент старта a_1 метров. Ахиллес и черепаха стартуют одновременно в одном направлении (от Ахиллеса к черепахе).

За то время, которое понадобится Ахиллесу, чтобы пробежать расстояние a_1 (до места старта черепахи), она проползёт какое-то расстояние a_2. Пока Ахиллес пробежит a_2, черепаха проползёт a_3. И так далее.

Поскольку таких частей пути Ахиллеса бесконечно много, он никогда не догонит черепаху.

Полученное противоречие означает, что сделанное нами предположение на шаге 1 неверно. Таким образом, движения в природе не существует. □

Список литературы

[1] **Аристотель** *Аналитики первая и вторая* //М., Госполитиздат, 1952. 438с.

[2] **Брюшинкин В.Н.** *Практический курс логики для гуманитариев* // М., Новая школа, 1996. 320 с.

[3] **Ивин А.А.** *Логика. Учебник для гуманитарных факультетов* // М., ФАИР-ПРЕСС, 2002

[1] Мы не пишем $\mathfrak{I}\, E$, так как Вася – целый, и ситуация, когда его часть – хороший студент, а часть – плохой, исключена.