Содержание

1. Отрицание суждений

Для того, чтобы рассуждать без ошибок, необходимо научиться грамотно строить отрицание суждений.

В простых случаях отрицание строится очевидным образом, например, отрицанием суждения «это – бред» является суждение «это – не бред», а отрицанием суждения «Вася – студент» является суждение «Вася – не студент» и т.д. Простота этих случаев в том, что первый термин в обоих случаях относится к одному неделимому объекту. Однако, если мы рассмотрим суждение той же схемы $A \Rightarrow B$, но с составным первым термином A, то отрицание надо уже строить аккуратно.

Пример 1.1. *Построить отрицание суждений:*

а) все студенты – двоечники;

б) все суждения ложны;

в) в каждой шутке есть доля правды;

г) $A \Rightarrow B$;

д) некоторые студенты – двоечники;

е) некоторые суждения ложны;

ж) в некоторых шутках есть доля правды;

з) $\mathfrak{I}\, A \Rightarrow B$.

а) Ответ: «некоторые студенты – не двоечники». (см. п. г).)

б) Ответ: «некоторые суждения истинны». (см. п. г).)

в) Ответ: «в некоторых шутках нет и доли правды». (см. п. г).)

г) Так как $A \Rightarrow B$ означает, что все точки круга A лежат в круге B, то отрицанием этого суждения является суждение «не все точки круга A лежат в круге B», то есть найдутся точки, лежащие в A, но не лежащие в B. Логической схемой этого суждения является схема

$$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B. \tag{1.1}$$

Нарисовав круги Эйлера, видим, что это суждение соответствует случаям «некоторые точки A лежат вне, а некоторые внутри B», «все точки A лежат вне B» и важный частный случай последнего: «$A = \neg B$». Легко заметить, что этими случаями полностью исчерпываются все возможные ситуации, при которых не выполнено суждение $A \Rightarrow B$. Итак:

Ответ: «$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B$».

д) **Ответ:** «все студенты – не двоечники». (см. п. з).)

е) **Ответ:** «все суждения истинны». (см. п. з).)

ж) **Ответ:** «ни в одной шутке нет и доли правды». (см. п. з).)

з) Суждение $\mathfrak{I}\, A \Rightarrow B$ означает, что некоторые точки круга A лежат в круге B. Тогда отрицанием будет суждение «ни одна точка A не лежит в B». Другими словами, «все точки A лежат вне B». Логическая схема этого суждения имеет вид: $A \Rightarrow \neg B$.

Ответ:
$$A \Rightarrow \neg B. \tag{1.2}$$

Пример 1.2. *Построить отрицание сложных терминов:*

а) маленький и зелёный;

б) замкнутая и ограниченная[1];

в) A **и** B;

г) $\begin{cases} x < a, \\ x \geqslant b; \end{cases}$

д) $|x-a| < b$;

е) линейное или квадратное;

ж) положительное или отрицательное;

з) A **или** B;

и) $\left[\begin{array}{l} x < a, \\ x \geqslant b. \end{array}\right.$

к) $|x-a| \geqslant b$.

а) **Ответ:** «немаленький или не зелёный». (см. п. в).)

б) **Ответ:** «незамкнутая или неограниченная». (см. п. в).)

в) Нарисовав круги Эйлера, видим, что точка принадлежит и кругу A, и кругу B, если и только если она лежит на их пересечении. Поэтому отрицанием сложного термина $(A$ **и** $B)$ является термин $\neg A$ **или** $\neg B$, то есть точка не принадлежит хотя бы одному из кругов.

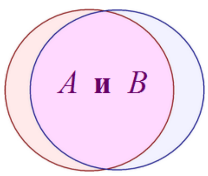

Рис.1. Пересечение кругов A и B

Ответ: $\neg A$ **или** $\neg B$.

г) Разбирать все возможные случаи взаимного расположения точек a и b здесь необязательно, так как в силу замечания 1.1 семинара № 1 фигурная скобка означает логическое «**и**», а значит данное суждение имеет логическую схему A **и** B. Поэтому воспользуемся результатом п. в). Так как отрицанием к неравенствам $x < a$ и $x \geqslant b$ являются неравенства $x \geqslant a$ и $x < b$, соответственно, получаем

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x \geqslant a, \\ x < b. \end{array}\right.$

д) Поскольку неравенство

$$|x-a| < b \qquad \text{равносильно системе} \qquad \begin{cases} x-a < b, \\ x-a > -b, \end{cases} \qquad \text{или, проще} \qquad \begin{cases} x < a+b, \\ x > a-b, \end{cases}$$

[1] Замкнутая и ограниченная область называется компактной областью, или просто компактом.

а знак системы означает логическое «**и**», то отрицание строится, аналогично п. г), как **совокупность** (то есть логическое «**или**») отрицаний.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x \geqslant a+b, \\ x \leqslant a-b. \end{array}\right.$

е) **Ответ:** «нелинейное и не квадратное». (см. п. з).)

ж) **Ответ:** «неположительное или неотрицательное». (см. п. з).)

з) Нарисовав круги Эйлера, видим, что точка принадлежит кругу A или кругу B, если и только если она лежит в их объединении. Поэтому отрицанием сложного термина $\big(A$ **или** $B\big)$ является термин $\neg A$ **и** $\neg B$, то есть точка не принадлежит ни одному из кругов.

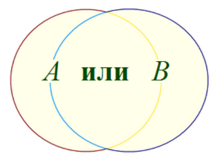

Рис.2. Объединение кругов A и B

Ответ: $\neg A$ **и** $\neg B$.

и) Разбирать все возможные случаи взаимного расположения точек a и b здесь необязательно, так как в силу замечания 1.1 семинара № 1 квадратная скобка означает логическое «**или**», а значит данное суждение имеет логическую схему A **или** B. Поэтому воспользуемся результатом п. з). Так как отрицанием к неравенствам $x < a$ и $x \geqslant b$ являются неравенства $x \geqslant a$ и $x < b$, соответственно, получаем

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x \geqslant a, \\ x < b. \end{array}\right.$

к) Поскольку неравенство

$$|x-a| \geqslant b \qquad \text{равносильно совокупности} \qquad \left[\begin{array}{l} x-a \geqslant b, \\ x-a \leqslant -b, \end{array}\right. \qquad \text{или, проще} \qquad \left[\begin{array}{l} x \geqslant a+b, \\ x \leqslant a-b, \end{array}\right.$$

а знак совокупности означает логическое «**или**», то отрицание строится, аналогично п. з), как **система** (то есть логическое «**и**») отрицаний.

Ответ: $\left\{\begin{array}{l} x < a+b, \\ x > a-b. \end{array}\right.$

Итак, отрицания строятся по правилам:

Суждение	Отрицание
$A \Rightarrow B$	$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B$
$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow \neg B$

Сложный термин	Отрицание
A **и** B	$\neg A$ **или** $\neg B$
A **или** B	$\neg A$ **и** $\neg B$

(1.3)

Легко заметить, что **при отрицании суждений**

- у первого термина меняется *признак всеобщности*, то есть появляется либо исчезает признак «некоторые»;
- перед вторым термином появляется *отрицание*.

В то же время, **при отрицании сложных терминов**

- оба простых термина заменяются на свои отрицания;
- операция **и** заменяется на **или**;
- операция **или** заменяется на **и**.

Пример 1.3. *Построить отрицание:*

а) D – замкнутая и ограниченная область;

б) $(A$ **и** $B) \Rightarrow (C$ **или** $D)$;

в) линейное или квадратное уравнение;

г) $(A$ **или** $B) \Rightarrow (C$ **и** $D)$.

а) Пусть A = «замкнутая», B = «ограниченная», C = «область». Тогда суждение «D – замкнутая и ограниченная область» запишется в виде схемы:

$$D \Rightarrow \Big(\big(A \text{ **и** } B\big) \text{ **и** } C \Big). \tag{1.4}$$

Упростим запись, обозначив внутренность больших скобок через E:

$$E = \Big(\big(A \textbf{ и } B\big) \textbf{ и } C \Big).$$

В этих обозначениях (1.4) примет вид:

$$D \Rightarrow E. \tag{1.5}$$

В силу правила отрицания суждения (см. таблицу выше),

$$\neg\big(D \Rightarrow E\big) \ = \ \Big(\mathfrak{I}\, D \Rightarrow \neg E\Big).$$

Но D – не множество областей, а одна единственная область, и она либо обладает свойством $\neg E$, либо не обладает. Поэтому $\mathfrak{I}\, D \Rightarrow \neg E$ равносильно в данном случае $D \Rightarrow \neg E$, и отрицанием (1.5) является суждение

$$D \Rightarrow \neg E. \tag{1.6}$$

Теперь выясним, что такое $\neg E$. По правилу отрицания сложного термина (см. таблицу выше),

$$\neg\Big(\underbrace{\big(A \textbf{ и } B\big)}_{F} \textbf{ и } C\Big) \ = \ \neg\Big(F \textbf{ и } C\Big) \ = \ \Big(\neg F \textbf{ или } \neg C\Big),$$

а выражение $\neg F \ = \ \neg\big(A$ **и** $B\big)$, в свою очередь, преобразуется в

$$\neg F \ = \ \neg\big(A \textbf{ и } B\big) \ = \ \big(\neg A \textbf{ или } \neg B\big).$$

Окончательно получаем, что

$$\neg E \ = \ \Big(\big(\neg A \textbf{ или } \neg B\big) \textbf{ или } \neg C\Big).$$

Осталось подставить это в (1.6), и мы получим, что отрицанием к исходному суждению является суждение

$$D \Rightarrow \Big(\big(\neg A \textbf{ или } \neg B\big) \textbf{ или } \neg C\Big),$$

или

Ответ: «D – незамкнутая, или неограниченная, или не область».

б) Чтобы построить отрицание суждения $\big(A$ **и** $B\big) \Rightarrow \big(C$ **или** $D\big)$, введём обозначения $E = \big(A$ **и** $B\big)$ и $F = \big(C$ **или** $D\big)$. Тогда исходное суждение упрощается:

$$E \Rightarrow F.$$

Его отрицанием, как мы уже знаем (см. таблицу выше), является суждение

$$\Im\, E \Rightarrow \neg F. \tag{1.7}$$

Осталось построить $\neg F = \neg\big(C \textbf{ или } D\big)$. По правилу построения отрицания сложных терминов, получаем:

$$\neg F = \big(\neg C \textbf{ и } \neg D\big). \tag{1.8}$$

Таким образом, (1.7) и (1.8) дают нам ответ:
отрицанием к исходному суждению является

$$\Im\,\big(A \textbf{ и } B\big) \Rightarrow \big(\neg C \textbf{ и } \neg D\big).$$

Ответ: $\Im\,\big(A \textbf{ и } B\big) \Rightarrow \big(\neg C \textbf{ и } \neg D\big).$

в) Пусть A = «линейное», B = «квадратное», C = «уравнение». Тогда термин «линейное или квадратное уравнение» запишется в виде схемы:

$$\big(A \textbf{ или } B\big) \textbf{ и } C. \tag{1.9}$$

Обозначим внутренность скобок через D:

$$D = \big(A \textbf{ или } B\big).$$

В этих обозначениях (1.9) примет вид:

$$D \textbf{ и } C. \tag{1.10}$$

В силу правила отрицания сложного термина (см. таблицу выше),

$$\neg\big(D \textbf{ и } C\big) = \big(\neg D \textbf{ или } \neg C\big). \tag{1.11}$$

Теперь выясним, что такое $\neg D$. По правилу отрицания сложного термина,

$$\neg D = \neg\big(A \textbf{ или } B\big) = \big(\neg A \textbf{ и } \neg B\big).$$

Подставляя это выражение в (1.11), окончательно получаем, что отрицанием исходного сложного термина является

$$\Big(\big(\neg A \textbf{ и } \neg B\big) \textbf{ или } \neg C\Big),$$

другими словами,

Ответ: «не линейное и не квадратное, или не уравнение».

г) Построим отрицание суждения

$$\underbrace{\big(A \textbf{ или } B\big)}_{E} \Rightarrow \underbrace{\big(C \textbf{ и } D\big)}_{F}.$$

Отрицанием для $E \Rightarrow F$, как мы уже знаем (см. таблицу выше), является суждение

$$\Im\, E \Rightarrow \neg F. \tag{1.12}$$

В свою очередь, по правилу построения отрицания сложных терминов, получаем:

$$\neg F \;=\; \big(\neg C \text{ **или** } \neg D\big). \tag{1.13}$$

Наконец, из (1.12) и (1.13) получаем ответ:
отрицанием к исходному суждению является

$$\mathfrak{I}\,\big(A \textbf{ или } B\big) \Rightarrow \big(\neg C \textbf{ или } \neg D\big).$$

Ответ: $\mathfrak{I}\,\big(A \textbf{ или } B\big) \Rightarrow \big(\neg C \textbf{ или } \neg D\big).$

В заключение обратим внимание, помня предыдущий семинар, что **обратное суждение не совпадает с отрицанием**.

Прямое суждение	Обратное суждение	Отрицание
$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$\mathfrak{I}\,A \Rightarrow \neg B$

2. Упражнения

Пример 2.1. *Построить отрицание:*

а) A и B сидели на трубе.

б) Умный и красивый, значит либо женатый, либо злой.

в) Женщина может всё, а мужчина – всё остальное.

г) $(x-a)(x-b) > 0$.

д) Все студенты – двоечники.

е) Некоторые студенты – двоечники.

ж) Все суждения ложны.

з) Некоторые суждения ложны.

и) В каждой шутке есть доля правды.

к) В некоторых шутках есть доля правды.

л) Всякая селёдка – рыба.

3. Дедукция и индукция

Существуют два основных направления логического вывода:

Дедукция: **от общего к частному**, например,

в любой науке нужна логика, математика – наука, значит в математике нужна логика.

Индукция: **от частного к общему**, например,

все самоубийцы в своей жизни ели огурцы, значит огурцы приводят к самоубийствам.

Заметим, что все примеры достоверного логического вывода, изложенные до данного пункта относились к дедукции. Индукция, в отличие от дедукции, далеко не всегда приводит к верным выводам, как видно уже из приведённого примера «о вреде огурцов»[1].

В.И. Арнольд в [2] приводит следущий пример неправомерной индукции:

> *Ученик Аристотеля, Александр Филиппович Македонский, сделал ряд «научных» открытий (описанных его спутником, Арианом, в «Анабазисе»). Например, он открыл исток реки Нил: по его словам, это Инд. «Научные» доказательства были такими: «Это — единственные две большие реки, которые кишмя кишат крокодилами» (и подтверждение: «Вдобавок, берега обеих рек заросли лотосами»).*

Однако, индукцию нельзя исключить полностью из методов научного познания мира. В самом деле, для дедукции необходимы общие посылки, то есть суждения вида «все A есть B». Но такие суждения могут встретиться только в аксиоматической теории, вроде математики, или получиться в результате полного перебора **конечного** набора вариантов (например, при проработке всех версий преступления в криминалистике) – это так называемая **исчерпывающая индукция** – единственный вид индукции, который позволяет сделать достоверный логический вывод.

В реальном мире человек никогда не сможет с полной достоверностью утверждать, что, например, справедлив закон всемирного тяготения, т.к. никто не может похвастаться, что проверил его действие на **всех** объектах в течении **всего времени как в прошлом, так и в будущем**. (Кстати, внимательный читатель мог заметить, что предыдущая фраза содержит точно такую же ошибку. В самом деле, чтобы достоверно утверждать, что «никто не может похвастаться...», надо проверить знания всех и за всё время... Однако, подобные утверждения, хотя и недоказуемые, весьма правдоподобны.) Так что, если ограничивать познание лишь дедукцией, кроме математики останутся лишь жалкие крохи от всего наследия человеческих знаний.

При этом следует всегда иметь учитывать, что **ни одно суждение, полученное неисчерпывающей индукцией, не может считаться полностью достоверным**, и все они должны довольствоваться скромным званием **гипотез**, более или менее достоверно описывающих **известный на данный момент человечеству опыт**. История представлений физиков о мире – история революций, свергавших господствовавшие теории – яркое тому свидетельство.

Умозаключения, построенные по методу индукции, называются «обобщениями», иногда «несправедливыми обобщениями». Слово «несправедливыми» обозначает не то, что утверждение, полученное индукцией, неверно, а то, что метод его получения нельзя считать полностью обоснованным.

Математики, насколько смогли, исправили эту ситуацию. В XVII в. Б. Паскаль ввёл «метод математической индукции». Этому методу посвящён следующий параграф.

[1] Пример навеян статьёй «О вреде огурцов» из сборника **Физики продолжают шутить** (сборник переводов, «Мир», Москва, 1968), куда она попала из «The Journal of Irreproducible Results».

4. Метод математической индукции

Данный метод – метод доказательства суждений, в которых утверждается, что *все элементы некоторого бесконечного занумерованного множества*[1] *обладают некоторым свойством.* Точная формулировка:

Опр. 4.1. Говорят, что *утверждение «Все элементы A_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ множества A обладают свойством B» доказано* ***методом математической индукции***, если установлена достоверность суждений:

1) База индукции. A_1 обладает свойством B.

2) Шаг индукции. При любом $n \in \mathbb{N}$ из того, что A_n обладает свойством B, следует, что A_{n+1} обладает свойством B.

Легко доказать справедивость этого метода от противного. В самом деле, пусть факты 1) и 2) установлены, и пусть, тем не менее, найдётся элемент A_{n_0} множества A, который не обладает свойством B. Тогда, в силу modus tollens из шага 2) следует, что A_{n_0-1} также не обладает свойством B. Аналогично, A_{n_0-2} также не обладает свойством B. И A_{n_0-3}. И так далее. За конечное число шагов $(n_0 - 1)$ мы дойдём до A_1, который также не имеет права обладать свойством B. Но это противоречит факту 1). Значит, наше предположение о ложности доказываемого утверждения «все A_n обладают свойством B» неверно.[2]

Заметим, что хотя метод и носит название «индукции», он по сути является дедуктивным, так как опирается на наличие большой посылки, содержащейся в шаге 2) (шаге индукции).

Заметим также, что на шаге 1) (база индукции) совершенно необязательно должен проверяться элемент A_1. Вместо него можно проверить любой A_{n_1}. Тогда, разумеется, вывод о наличии свойства B у элементов A_n можно делать только начиная с номера n_1.

5. Упражнения

Пример 5.1. *Доказать по индукции:*[3]

№ 1.
$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

№ 2.
$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

№ 3.
$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \big(1 + 2 + \ldots + n\big)^2.$$

№ 4.
$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

№ 5. Пусть $a^{[n]} = a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]} = 1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]} = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m \, a^{[n-m]} b^{[m]}$, где $C_n^m = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – число сочетаний из n

[1] бесконечные множества, элементы которых можно все занумеровать, называются **счётными**. Счётными являются, в частности, числовые множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. В то же время, существуют и множества, которые перенумеровать невозможно, например, $\mathbb{R}$. Они называются **несчётными**.

[2] Справедливости ради, отметим, что представители движения «интуиционистов» принимают метод математической индукции только как обоснование наличия свойства B у любого **конечного** числа элементов множества A, но никак не у всех сразу.

[3] Нумерация примеров ведётся по задачнику Демидовича.

элементов по m.
Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона.*

№ 6. Доказать *неравенство Бернулли:*

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\dots x_n,$$

где $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ – числа одного и того же знака, бо́льшие -1.

№ 7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \qquad n>1,$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

№ 8. Доказать неравенство:

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n \geqslant 2.$$

№ 1. Чтобы доказать $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ методом математической индукции, надо осуществить два шага:

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое равенство верно при $n=1$.

Для $n=1$ равенство превращается в $1=\dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$.
Это – верное равенство.

2) Шаг индукции. *Пусть доказываемое равенство верно при $n=k$:*

$$1+2+\ldots+k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

Проверим выполнение соответствующего равенства при $n=k+1$.

Для $n=k+1$ левая часть равенства принимает вид: $1+2+\ldots+k+(k+1)$. Но в силу сделанного предположения,

$$\underbrace{1+2+\ldots+k}_{=\frac{k(k+1)}{2}}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+2)(k+1)}{2},$$

что в точности совпадает с правой частью равенства при $n=k+1$. Равенство доказано.

№ 2. Докажем $1^2+2^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое равенство верно при $n=1$.

Для $n=1$ равенство превращается в $1^2=\dfrac{1\cdot(1+1)\cdot(2+1)}{6}$.
Это равенство, очевидно, выполняется: $1=1$.

2) Шаг индукции. *Пусть доказываемое равенство верно при $n=k$:*

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Проверим выполнение соответствующего равенства при $n = k+1$.

Для $n = k+1$ левая часть равенства принимает вид: $1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2$. Но в силу сделанного предположения,

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} =$$

$$= \frac{(k+1)\big(k(2k+1) + 6(k+1)\big)}{6} = \frac{(k+1)\left(2k^2 + 7k + 6\right)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

что в точности совпадает с правой частью равенства при $n = k+1$. Равенство доказано.

№ 3. Докажем $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \big(1 + 2 + \ldots + n\big)^2$.

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое равенство верно при $n = 1$.

Для $n = 1$ равенство превращается в $1^3 = 1^2$.
Это равенство, очевидно, верное.

2) Шаг индукции. *Пусть доказываемое равенство верно при $n = k$:*

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \big(1 + 2 + \ldots + k\big)^2.$$

Проверим выполнение соответствующего равенства при $n = k+1$.

Для $n = k+1$ левая часть равенства принимает вид: $1^3 + 2^3 + \ldots + k^3$. Но в силу сделанного предположения,

$$\underbrace{1^3 + 2^3 + \ldots + k^3}_{=\left(1+2+\ldots+k\right)^2} + (k+1)^3 = \big(1 + 2 + \ldots + k\big)^2 + (k+1)^3 = \Big[\text{в силу № 1}\Big] =$$

$$= \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4} = \frac{(k+1)^2\left(k^2 + 4(k+1)\right)}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2\left(k^2 + 4k + 4\right)}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \Big[\text{в силу № 1}\Big] = \Big(1 + 2 + \ldots + k + (k+1)\Big)^2,$$

что в точности совпадает с правой частью равенства при $n = k+1$. Равенство доказано.

№ 4. Докажем $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$.

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое равенство верно при $n = 1$.

Для $n = 1$ равенство превращается в $1 = 2^1 - 1$.
Это равенство верно: $1 = 1$.

2) Шаг индукции. *Пусть доказываемое равенство верно при $n = k$:*

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1.$$

Проверим выполнение соответствующего равенства при $n = k+1$.

Для $n = k+1$ левая часть равенства принимает вид: $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1} + 2^k$. Но в силу сделанного предположения,

$$\underbrace{1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k-1}}_{=2^k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1,$$

что в точности совпадает с правой частью равенства при $n = k+1$. Равенство доказано.

№ 5. *Нам дано* $a^{[n]} = a(a-h)\dots[a-(n-1)h]$ *и* $a^{[0]} = 1$.
Докажем, что $(a+b)^{[n]} = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]}$.

Сначала выведем вспомогательную формулу о «биномиальных коэффициентах» C_n^m:

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}. \tag{5.1}$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} C_n^m + C_n^{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\cdot\frac{(m+1)+(n-m)}{(m+1)(n-m)} = \\ &= \frac{n!}{m!(n-m-1)!}\cdot\frac{n+1}{(m+1)(n-m)} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = C_{n+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое равенство верно при $n = 0,\ 1,\ 2$.

Для $n = 0$[1] равенство превращается в

$$(a+b)^{[0]} = \sum_{m=0}^{0} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} = C_0^0 a^{[0]} b^{[0]}.$$

А это равенство верно: $1 = 1$.

При $n = 1$ мы также получаем справедливое соотношение:

$$a + b = (a+b)^{[1]} = \sum_{m=0}^{1} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} = C_1^0 a^{[1]} b^{[0]} + C_1^1 a^{[0]} b^{[1]} = \underbrace{\frac{1!}{0!\,1!}}_{=1} a + \underbrace{\frac{1!}{1!\,0!}}_{=1} b = a + b.$$

При $n = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} (a+b)(a+b-h) = (a+b)^{[2]} &= \sum_{m=0}^{2} C_n^m a^{[n-m]} b^{[m]} = C_2^0 a^{[2]} b^{[0]} + C_2^1 a^{[1]} b^{[1]} + C_2^2 a^{[0]} b^{[2]} = \\ &= \underbrace{\frac{2!}{0!\,2!}}_{=1} a(a-h) + \underbrace{\frac{2!}{1!\,1!}}_{=2} ab + \underbrace{\frac{2!}{2!\,0!}}_{=1} b(b-h) = \end{aligned}$$

$$= a(a-h) + 2ab + b(b-h) = \Big[a(a-h) + ab\Big] + \Big[b(b-h) + ab\Big] = a(a+b-h) + b(b+a-h) = (a+b)(a+b-h).$$

2) Шаг индукции. *Пусть доказываемое равенство верно при* $n = k$*:*

$$(a+b)^{[k]} = \sum_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]} b^{[m]}.$$

[1]Заметим, что здесь мы начали с $n = 0$, поскольку это – минимальное значение параметра n, при котором доказываемое равенство имеет смысл. Однако, мы проверим ещё и $n = 2$, так как именно справедливость равенства при $n = 2$ используется на втором шаге. А $n = 1$ мы проверим для полноты картины, чтобы в ответе можно было написать, что равенство верно при всех целых $n \geqslant 0$.

Проверим выполнение соответствующего равенства при $n = k+1$.

Для $n = k+1$ левая часть равенства принимает вид: $(a+b)^{[k+1]}$. По определению,

$$(a+b)^{[k+1]} = (a+b)(a+b-h)\ldots[a+b-(k-1)h]\,(a+b-kh) =$$

$$= \underbrace{(a+b)(a+b-h)\ldots[a+b-(k-1)h]}_{=\sum\limits_{m=0}^{k} C_k^m a^{[k-m]}b^{[m]}} \cdot (a+b-kh) = \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m]}b^{[m]} \ \cdot\ (a+b-kh) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m]}b^{[m]} \ \cdot\ \Big[\big(a-(k-m)h\big) + \big(b-mh\big)\Big] =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m]}b^{[m]} \ \cdot\ \Big(a-(k-m)h\Big) + \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m]}b^{[m]} \ \cdot\ \Big(b-mh\Big) =$$

$$= \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m+1]}b^{[m]} \ +\ \sum_{m=0}^{k} C_k^m\ a^{[k-m]}b^{[m+1]} =$$

$$= \Big[\text{Распишем суммы правой части и сгруппируем слагаемые с одинаковым показателем у } a\text{:}\Big] =$$

$$\begin{aligned}= C_k^0\ a^{[k+1]}b^{[0]} \ &+\ C_k^1\ a^{[k]}b^{[1]} \ +\ C_k^2\ a^{[k-1]}b^{[2]} \ +\ \ldots\ +\ C_k^k\ a^{[1]}b^{[k]} \ + \\ &+\ C_k^0\ a^{[k]}b^{[1]} \ +\ C_k^1\ a^{[k-1]}b^{[2]} \ +\ \ldots\ +\ C_k^{k-1}\ a^{[1]}b^{[k]} \ +\ C_k^k\ a^{[0]}b^{[k+1]} \ =\end{aligned}$$

$$= \Big[\text{группируем слагаемые, находящиеся друг под другом}\Big] =$$

$$\begin{aligned}= C_k^0\ a^{[k+1]}b^{[0]} + \big(C_k^1 + C_k^0\big)\ a^{[k]}b^{[1]} + \big(C_k^2 + C_k^1\big)\ a^{[k-1]}b^{[2]} + \ldots + \\ + \big(C_k^k + C_k^{k-1}\big)\ a^{[1]}b^{[k-1]} + C_k^k\ a^{[0]}b^{[k]} =\end{aligned}$$

$$= \Big[\text{по формуле (5.1) и в силу очевидных равенств } C_k^0 = C_k^k = C_{k+1}^0 = C_{k+1}^{k+1} = 1\Big] =$$

$$= C_{k+1}^0\ a^{[k+1]}b^{[0]} + C_{k+1}^1\ a^{[k]}b^{[1]} + C_{k+1}^2\ a^{[k-1]}b^{[2]} + \ldots + C_{k+1}^k\ a^{[1]}b^{[k]} + C_{k+1}^{k+1}\ a^{[0]}b^{[k+1]} =$$

$$= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{[k-m+1]}b^{[m]}.$$

что в точности совпадает с правой частью равенства $(a+b)^{[n]} = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m\ a^{[n-m]}b^{[m]}$ при $n = k+1$. Равенство доказано.

Для того, чтобы вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m\ a^{n-m}\, b^m, \tag{5.2}$$

достаточно в доказанном равенстве $(a+b)^{[n]} = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m\ a^{[n-m]} b^{[m]}$ положить $h = 0$. В самом деле, тогда

- $a^{[p]} = a(a-h)\ldots[a-(p-1)h] = a^p, \qquad p \in \mathbb{Z},\ \ p \geqslant 0,$
- аналогично, $b^{[p]} = b^p, \qquad p \in \mathbb{Z},\ \ p \geqslant 0$ и
- $(a+b)^{[n]} = (a+b)^n$.

№ 6. Докажем неравенство Бернулли:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots x_n, \qquad x_i > -1, \quad x_i x_j \geqslant 0.$$

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое неравенство верно при $n = 1$.

Для $n = 1$ оно превращается в верное равенство $1 + x_1 = 1 + x_1$.

2) Шаг индукции. *Пусть неравенство Бернулли верно при $n = k$:*

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots x_k. \tag{5.3}$$

Проверим выполнение соответствующего неравенства при $n = k + 1$.

Домножим (5.3) на $(1 - x_{k+1})$. Так как все $x_i > -1$, эта скобка положительна, и знак неравенства не изменится:

$$\underbrace{(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)}_{\geqslant\, 1+x_1+x_2+\ldots x_k} \cdot (1+x_{k+1}) \geqslant \Big(1+x_1+x_2+\ldots x_k\Big)\cdot(1+x_{k+1}) =$$

$$= \Big(1+x_1+x_2+\ldots x_k\Big) + \Big(x_{k+1} + \underbrace{x_1 x_{k+1}}_{\geqslant 0} + \underbrace{x_2 x_{k+1}}_{\geqslant 0} + \ldots \underbrace{x_k x_{k+1}}_{\geqslant 0}\Big) \geqslant 1+x_1+x_2+\ldots x_k+x_{k+1},$$

что совпадает с правой частью неравенства Бернулли при $n = k+1$. Неравенство Бернулли доказано.

№ 7. Докажем, что справедливо неравенство[1]:

$$(1+x)^n \geqslant 1+nx, \qquad x > -1, \qquad n > 1,$$

причём знак равенства имеет место лишь при $x = 0$.

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое неравенство верно при $n = 2$[2].

Для $n = 2$ оно превращается в верное неравенство $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 \geqslant 1+2x$. Причём, так как $x^2 = 0$ только при $x = 0$, то равенство здесь достигается только при $x = 0$.

2) Шаг индукции. *Пусть неравенство справедливо при $n = k \geqslant 2$:*

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx, \qquad x > -1. \tag{5.4}$$

[1] Это неравенство моментально следует из неравенства Бернулли (№ 6), но мы докажем его отдельно, во-первых, чтобы отработать доказательство методом математической индукции, а во-вторых, поскольку нам требуется помимо самого неравенства установить ещё, что равенство достигается только при $x = 0$.

[2] Мы начинаем с $n = 2$, так как в условии задачи $n > 1$.

Проверим выполнение соответствующего неравенства при $n = k + 1$.

Домножим (5.4) на $(1 - x)$. Так как $x > -1$, эта скобка положительна, и знак неравенства не изменится:

$$\underbrace{(1+x)^k}_{\geqslant 1+kx} \cdot (1+x) \geqslant \Big(1+kx\Big) \cdot (1+x) = \Big(1+kx\Big) + \Big(x + \underbrace{k\,x^2}_{\geqslant 0}\Big) \geqslant 1 + (k+1)x,$$

причём, поскольку $x^2 = 0$ только при $x = 0$, то равенство здесь достигается только при $x = 0$. Неравенство доказано.

№ 8. Докажем неравенство:

$$n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \qquad n \geqslant 2.$$

1) База индукции. Проверка «в лоб», что доказываемое неравенство верно при $n = 2$.

Для $n = 2$ оно превращается в верное неравенство $2! \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$.

2) Шаг индукции. *Пусть неравенство справедливо при $n = k \geqslant 2$:*

$$k! \leqslant \left(\frac{k+1}{2}\right)^k.$$

Проверим выполнение соответствующего неравенства при $n = k + 1$:

$$(k+1)! \leqslant \left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1}. \tag{5.5}$$

Рассмотрим правую часть (5.5):

$$\left(\frac{k+2}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} >$$
$$> \left[\text{в силу неравенства } \left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2, \text{ которое следует из неравенства № 7 при } x = \frac{1}{k+1}\right] >$$
$$> 2\left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1} = \underbrace{\left(\frac{k+1}{2}\right)^k}_{\geqslant k!} \cdot \underbrace{2 \cdot \left(\frac{k+1}{2}\right)}_{= k+1} \geqslant k! \cdot (k+1) = (k+1)!,$$

что совпадает с левой частью неравенства (5.5). Неравенство доказано.

Пример 5.2. *Найти ошибку в рассуждениях:*

> ***Утв.*** *Все числа множества* $\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ *равны нулю.*
>
> *Доказательство.* **1) База индукции.** При $n = 0$ равенство $n = 0$ верно.
> **2) Шаг индукции.** Пусть при $n = k$ справедливы равенства $0 = 1 = \ldots = k = 0$.
> Тогда при $n = k + 1$ получаем:
>
> $$k + 1 = \underbrace{k}_{=0} + \underbrace{1}_{=0} = 0 + 0 = 0.$$
>
> Таким образом, в силу метода математическиой индукции, все неотрицательные целые числа равны нулю. □

Решение. Рассуждения шага 2) верны при любых $k > 1$, но не верны при $k = 1$. Поэтому между базой индукции (при $n = 0$) и шагом индукции ($n \geqslant 2$) есть один-единственный шаг (при $n = 1$), который не был доказан, но используется в дальнейшем доказательстве.

Список литературы

[1] **Аристотель** *Аналитики первая и вторая* //М., Госполитиздат, 1952. 438с.

[2] **Арнольд В.И.** *Новый обскурантизм и Российское просвещение* // М.: ФАЗИС, 2003. 60с.

[3] **Брюшинкин В.Н.** *Практический курс логики для гуманитариев* // М., Новая школа, 1996. 320 с.

[4] **Ивин А.А.** *Логика. Учебник для гуманитарных факультетов* // М., ФАИР-ПРЕСС, 2002