Простейшие логические конструкции

Содержание

1. Силлогизмы и круги Эйлера

Ещё в Древней Греции изучению логики и её использованию для доказательств или опровержений посвящались значительные усилия. Законы, по которым тем или иным суждениям можно присвоить звание «верных», «логичных», либо наоборот, «неверных», интриговали людей столетиями. Различные школы совершенствовались в умении грамотно и неопровержимо доказывать свои идеи. Однако считается, что логика как наука начинается с работы Аристотеля «Аналитики». В ней Аристотель ввёл основные понятия и описал некоторые правила, которые заложили основу **формальной логики**.

Основной идеей формальной логики является тот факт, что истинность или ложность высказывания определяется не его смысловым содержанием, а его логической структурой.

Например, умозаключение «Если все *шепчущие галереи* – квазимоды, а все квазимоды есть приближённые собственные функции, то все *шепчущие галереи* есть приближённые собственные функции» не вызывает сомнений, хотя и содержит неизвестные понятия. Дело в том, что его логическая структура полностью совпадает со структурой очевидно справедливых умозаключений «Если все птицы являются животными, а ворона является птицей, то ворона – животное» и «Если все люди смертны, а Кай Юлий Цезарь – человек, то Кай Юлий Цезарь смертен». Поэтому нам оказывается не важным, знаем мы или нет, что такое «шепчущие галереи» и «квазимоды», и что называется «приближёнными собственными функциями», чтобы оценить первое умозаключение как верное[1]. Достаточно, что его логическая структура верна.

Аристотель нашёл несколько справедливых логических конструкций и назвал каждое утверждение, построенное в соответствии с ними, **«силлогизмом»**. Силлогизмы Аристоте-

[1]Посылки к этому умозаключению взяты из [5], стр. 134 – 137. Это – реальные математические понятия спектральной теории дифференциальных операторов.

ля состоят из двух посылок (фактов, из которых делается вывод) и заключения (результата логического умозаключения из данных посылок). В нашем примере

Первая посылка	Вторая посылка	Заключение
квазимоды – приближённые собственные функции	*Шепчущие галереи* – квазимоды	*Шепчущие галереи* – приближённые собственные функции
Все птицы есть животные	ворона – птица	ворона – животное
Все люди смертны	Кай Юлий Цезарь – человек	Кай Юлий Цезарь смертен

Заметим, что все эти умозаключения имеют формальную структуру вида

$$\text{Если } \ A \Rightarrow B \ \text{ и } \ C \Rightarrow A, \quad \text{то} \quad C \Rightarrow B. \tag{1.1}$$

В частности, в первом случае,

- A означает свойство «быть квазимодой»;
- B означает свойство «быть приближённой собственной функцией»;
- C означает свойство «быть *шепчущей галереей*».

Чтобы перейти к разговору о различных видах силлогизмов, осталось определить, какие суждения мы будем считать премлемыми посылками.

Опр. 1.1. **Суждением** в формальной логике мы будем называть высказывание двух видов:

1) Если x обладает свойством A, то x обладает свойством B.[1]
Коротко мы будем это обозначать так:
$$A \Rightarrow B.$$

2) Некоторые x, обладающие свойством A, обладают и свойством B.
Коротко мы будем это обозначать так:
$$\Im\, A \Rightarrow B.$$
Символ $\Im$ читается как «некоторые» и не является общепринятым. Мы используем его для сокращения записи наряду с «кванторами» $\forall$ и $\exists$, которые будут введены ниже.

Части суждений (A, B, $\Im\, A$ и т.п.) принято называть **терминами** (простыми терминами). Логические выражения

$$A \ \textbf{и} \ B \qquad \text{и} \qquad A \ \textbf{или} \ B$$

мы будем называть **сложными терминами**.

Замечание 1.1. Следует обратить внимание, что
«знак системы» – фигурная скобка $\{$ – означает логическое «и», а
«знак совокупности» – квадратная скобка $[$ – означает логическое «или». Например, запись

$$\begin{cases} x+y=2; \\ -x+y=0 \end{cases}$$ означает, что выполнены **оба** уравнения, а

$$\left[\begin{array}{l} x+y=2; \\ -x+y=0 \end{array}\right.$$ – что выполнено **хотя бы одно** из уравнений.

Легко заметить, что это определение имеет наглядную интерпретацию:
Назовём множеством $\mathcal{A}$ множество всех объектов, обладающих свойством A, а множеством $\mathcal{B}$ – множество всех объектов, обладающих свойством B. Тогда очевидно, что фраза из определения

«Если x обладает свойством A, то x обладает свойством B»

равносильна тому, что множество $\mathcal{A}$ вложено в или совпадает со множеством $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}.$$

Л. Эйлер обратил внимание, что такую конструкцию удобно наглядно изобразить в виде кругов (**кругов Эйлера**), представляя каждое утверждение в виде круга. В этой интерпретации
$A \Rightarrow B$ выглядит как круг A полностью лежит в круге B или совпадает с ним $A \subseteq B$

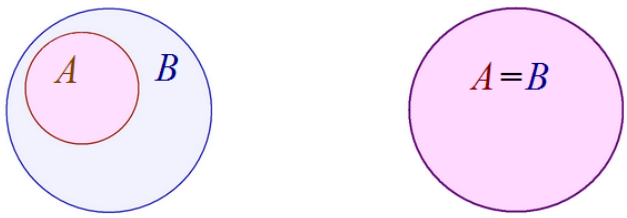


Рис.1. Два случая для $A \Rightarrow B$

$\Im A \Rightarrow B$ означает, что круги A и B пересекаются $A \cap B \neq \varnothing$, хотя и не исключает случая $A \subseteq B$ или $B \subseteq A$:

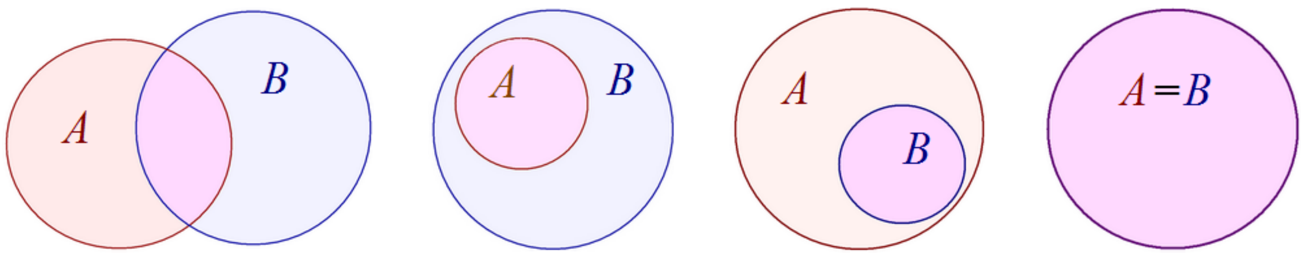


Рис.2. Четыре случая для $\Im A \Rightarrow B$

[1]или, что то же самое, «Все x, обладающие свойством A, обладают и свойством B».

Если мы введём обозначение $\neg A$ для **отрицания** A, то для круга A его внешность будет соответствовать $\neg A$:

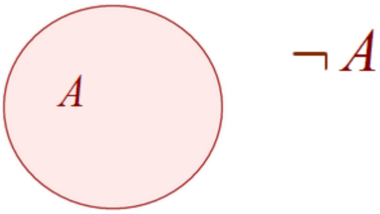


Рис.3. Круг A и его внешность $\neg A$

Тогда суждение $A \Rightarrow \neg B$ будет означать, что круги A и B не пересекаются:

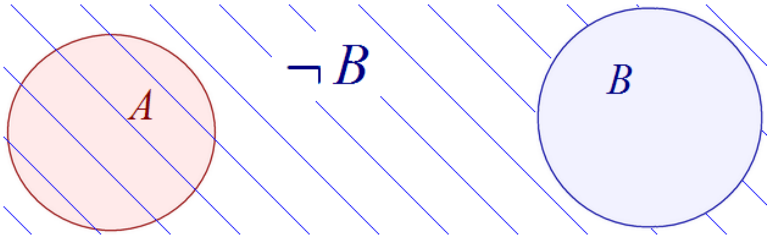


Рис.4. $A \Rightarrow \neg B$

Сложные термины $(A$ **и** $B)$ и $(A$ **или** $B)$ в этой интерпретации означают пересечение и объединение кругов A и B, соответственно:

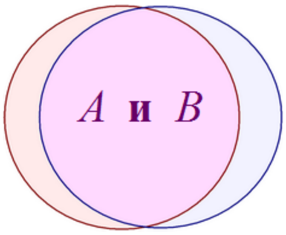


Рис.5. Пересечение кругов A и B

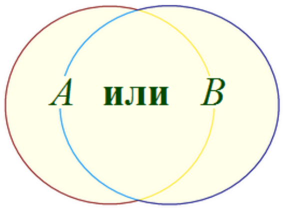


Рис.6. Объединение кругов A и B

При помощи кругов Эйлера легко выводятся основные законы логики, а также легко строятся всевозможные силлогизмы.

2. Некоторые законы формальной логики

Правильно или неправильно - это вопрос философский.
В.С. Черномырдин

Пример 2.1. *При помощи кругов Эйлера обосновать законы:*

а) $(A$ **или** $\neg A)$ всегда истинно (**закон исключённого третьего**);

б) $(A$ **и** $\neg A)$ всегда ложно (**закон непротиворечия**);

в) $\neg(\neg A) = A$ (**закон отрицания отрицания**);

г) $(A \Rightarrow B) = (\neg B \Rightarrow \neg A)$ (**modus tollens**[1]).

Привести примеры истинных и ложных рассуждений в соответствии с каждым из законов. Указать ошибки в ложных рассуждениях.

а) В терминологии кругов Эйлера запись $(A \text{ **или** } \neg A)$ означает, что «точка плоскости принадлежит либо кругу A, либо его внешности[1]»:

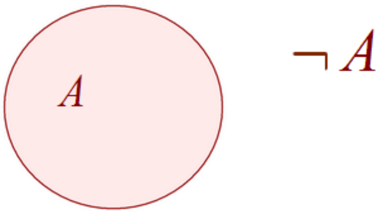


Рис.7. Круг A и его внешность $\neg A$

А так как это утверждение справедливо **для любой точки**, $(A$ **или** $\neg A)$ **всегда** верно.

Истинное рассуждение: *Если n – натуральное число, то оно либо чётно, либо нечётно. Если оно, например, не является нечётным, оно обязательно будет чётным.*
Ложное рассуждение: *Если m – целое число, то оно либо положительно, либо отрицательно.*
Ошибка: *Отрицанием суждения «число положительно» является суждение «число отрицательно или равно нулю», а не суждение «число отрицательно».*

б) В терминологии кругов Эйлера запись $(A$ **и** $\neg A)$ означает, что «точка плоскости принадлежит и кругу A, и его внешности». А так как это утверждение неверно **ни для одной точки** (см. Рис. 7), $(A$ **и** $\neg A)$ **всегда** ложно.

Истинное рассуждение: *Ни одно натуральное число не может быть чётным и нечётным одновременно.*
Ложное рассуждение: *Ни одно целое число не может быть чётным и делиться на 3 одновременно.*
Ошибка: *Отрицанием суждения «число чётно» является суждение «число нечётно», а не суждение «число не кратно трём». Например, существует число чётное 6, кратное трём.*

в) Рассмотрим любую точку, принадлежащую $\neg(\neg A)$. Первый знак отрицания говорит, что она не лежит в $\neg A$. Тогда она лежит в A (см. Рис. 7). А так как точка была произвольная, то множество $\neg(\neg A)$ содержится в A.
Наоборот, рассмотрим произвольную точку A. Раз она в A, она не может лежать вне A, то есть она не лежит в $\neg A$. Отсюда, множество A содержится в $\neg(\neg A)$.
Раз множества A и $\neg(\neg A)$ содержат друг друга, то они совпадают[2].

---

[1]Обычно modus tollendo tollens записывают по-другому:

$$\text{если } A \Rightarrow B \text{ и } \neg B, \text{ то } \neg A.$$

Обе формы записи выражают одну и ту же логическую конструкцию. Заметим также, забегая вперёд, что на основе этого закона производятся доказательства «от противного».

[1]Предполагается, что граница круга принадлежит кругу.

[2]В данном случае всё просто. Заинтересованному читателю можно порекомендовать для сравнения познакомиться с теоремой Кантора – Бернштейна (в некоторых учебниках её называют теоремой Шредера – Бернштейна) и, возможно, предложить её простое доказательство на основе аналогичных рассуждений.

Истинное рассуждение: *Если гриб не является несъедобным, то его можно есть.*
Ложное рассуждение: *Если студент не является двоечником, то он молодец.*
Ошибка: *Отрицанием суждения «студент является двоечником» является суждение «студент – либо троечник, либо хорошист, либо отличник», а не суждение «студент – молодец».*

г) Так как $A \Rightarrow B$ на языке кругов Эйлера означает, что круг A лежит в круге B (возможно, совпадает с ним), то внешность круга B (а он не меньше круга A), является частью (или совпадает с) внешности круга A:

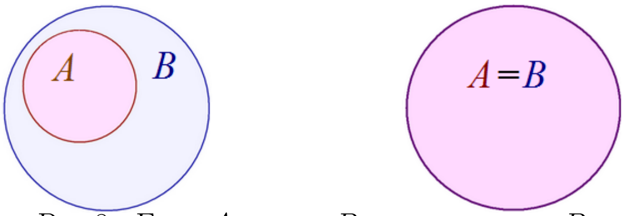


Рис.8. Если A лежит B, то внешность B лежит во внешности A.

Истинное рассуждение: *Чтобы стать студентом, необходимо сдать экзамены. Вася не сдал экзамены. Значит, Вася – не студент.*
Ложное рассуждение: *(Телевизионная реклама 2000 г.) «Если вам известно качество, вы знаете Bosh».*
Ошибка: *В силу modus tollens это суждение равносильно утверждению «Если вы не знаете Bosh, вам неизвестно качество». Что означает, что кроме как у Bosh качество нигде не встречается. Использована скрытая ложная посылка.*
Пример софизма: *Человек человеку друг. Вася мне не друг. Значит, Вася – не человек.*
Ошибки: *1. Использована ложная посылка «человек человеку друг». 2. Если бы обе посылки были верны, то всё равно вывод несправедлив, правильное заключение звучало бы так: «либо я – не человек, либо Вася – не человек».*

3. Стандартные логические ошибки

Только один человек меня понял; да и тот меня, по правде сказать, не понял.

Г.В.Ф. Гегель

Плюрализм нужен нашей стране как воздух, и двух мнений об этом быть не может.

М.С. Горбачёв

В этом разделе мы проиллюстрируем два типа логических ошибок: наиболее часто встречающиеся ошибки, которые являются следствием отсутствия культуры мышления, и изощрённые ошибки, которые являются осознанным средством введения собеседника в заблуждение. Последние составляют арсенал софиста, человека, которому важно убедить в своей правоте, а не выяснить истину. Несмотря на то, что школа софизма существовала в древней Греции, сейчас наблюдается расцвет школ, использующих и развивающих ту же технику. Поэтому следует научиться находить даже очень хорошо замаскированные ошибки.

3.1. Простейшие примеры

Пример 3.1. *Опровергнуть:*

а) Все параллельные прямые не пересекаются, $a \nparallel b$, значит a и b пересекаются.

б) Все параллельные прямые не пересекаются, a и b не пересекаются, значит $a \parallel b$.

в) $A \Rightarrow B$, значит $B \Rightarrow A$.

г) Все студенты – люди. Вася – человек. Значит, Вася – студент.

д) Люди не летают. Люди – не деревья. Значит, деревья летают.

а) Обозначим: A – «прямые параллельны», B – «прямые пересекаются». Тогда логика утверждения «Все параллельные прямые не пересекаются, $a \nparallel b$, значит a и b пересекаются» записывается так:

$$A \Rightarrow \neg B, \quad \text{значит} \quad \neg A \Rightarrow B.$$

На кругах Эйлера сразу видно, что данное утверждение неверно: из того, что круг A лежит вне круга B, не следует, что внешность круга A лежит внутри круга B (см. Рис. 4).

В данном примере умозаключения не учитывается возможность существования скрещивающихся прямых. В то же время оно справедливо на плоскости, но там его логика имеет уже вид $A = \neg B$, значит $\neg A = B$.

б) Обозначим: A – «прямые параллельны», B – «прямые пересекаются». Тогда логика утверждения «Все параллельные прямые не пересекаются, a и b не пересекаются, значит $a \parallel b$» записывается так:

$$A \Rightarrow \neg B, \quad \text{значит} \quad \neg B \Rightarrow A.$$

Это – стандартная ошибка, менять причину и следствие местами.
На кругах Эйлера сразу видно, что данное утверждение неверно: из того, что круг A лежит вне круга B, не следует, что внешность круга B лежит внутри круга A (см. Рис. 4).

В данном примере, как и в пункте а), не учитывается возможность существования скрещивающихся прямых.

в) Другая запись той же стандартной ошибки, когда причину и следствие меняют местами. Круги Эйлера наглядно иллюстрируют, что из того, что A лежит внутри B, не следует, что B лежит внутри A (см. Рис. 1).

г) Обозначим: A – «студент», B – «человек», C – «Вася». Тогда логика утверждения «Все студенты – люди, Вася – человек, значит, Вася – студент» записывается так:

$$A \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow B, \quad \text{значит} \quad C \Rightarrow A.$$

На кругах Эйлера сразу видно, что данное утверждение неверно:

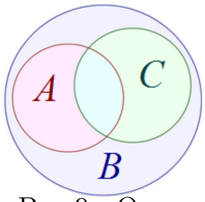


Рис.9. Один из вариантов расположения кругов A, B и C.

из того, что круги A и C лежат в круге B, не следует, что круг C лежит внутри круга A.

д) Обозначим: A – «люди», B – «летают», C – «деревья». Тогда логика утверждения «Люди не летают, люди – не деревья, значит, деревья летают» записывается так:

$$A \Rightarrow \neg B, \quad A \Rightarrow \neg C, \quad \text{значит} \quad C \Rightarrow B.$$

На кругах Эйлера сразу видно, что данное утверждение неверно:

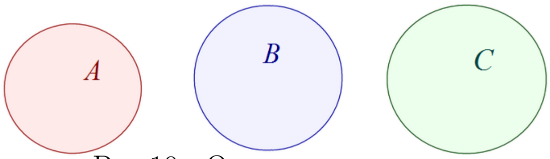


Рис.10. Один из вариантов расположения кругов A, B и C

из того, что круг A лежит вне кругов B и C, не следует, что круг C лежит внутри круга B.

Наиболее часто встречаются логические ошибки вида:

$$\begin{array}{llll}
1) & A \Rightarrow B, & \text{значит} & \neg A \Rightarrow \neg B; \\
2) & A \Rightarrow B, & \text{значит} & B \Rightarrow A; \\
3) & A \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow B, & \text{значит} & C \Rightarrow A; \\
4) & A \Rightarrow B, \quad A \Rightarrow C, & \text{значит} & B \Rightarrow C.
\end{array}$$

3.2. Немного о софистике

– Ах, я лгу? Значит, я вру? Значит, я брешу? Мама, он обозвал меня собакой!

Некий софист спросил Диогена: «Я – это не ты, верно?» – «Верно», – сказал Диоген. «Я – человек». – «И это верно», – сказал Диоген. «Следовательно, ты – не человек». – «А вот это, – сказал Диоген, – ложь».

Данное рассуждение имеет практически такую же схему, что и пример д) из предыдущего пункта. Его ошибка лежит на поверхности и легко обнаруживается на кругах Эйлера.

Но есть более тонкие ошибки, например, стандартный приём софистики

подмена термина.

Его логическая схема:

$$A \Rightarrow B, \quad \text{значит} \quad C \Rightarrow B$$

или

$$A \Rightarrow B, \quad \text{значит} \quad A \Rightarrow C.$$

Площадь квадрата. *«Площадь квадрата равна a^2, значит, площади всех квадратов равны.»*
Здесь подменён термин «вычисляются по одной и той же формуле» на термин «равны». Это стало возможным из-за нечёткой формулировки посылки. В ней, разумеется, предполагалось, что всем ясно, что речь идёт о квадрате со стороной, длина которой равна a. Но так как это не было оговорено явно, появилась возможность интерпретировать посылку не как «площадь квадрата со стороной a вычисляется по формуле a^2», а в смысле «площадь любого квадрата равна числу a^2».

Половины. *«Если равны половины, то равны и целые. Полупустой стакан равен полуполному. Значит, пустой стакан равен полному.»*
Здесь подмена также произошла из-за нечёткости формулировки первой посылки. На самом деле посылка «если равны половины, то равны и целые» относится только к числам. Для прочих объектов необходимо точно определить, что понимается под половиной, под целым и под равенством, иначе вывод делать невозможно.

Ещё один подобный приём, при котором в процессе дикуссии подменяется не термин, а целое суждение, называется

подмена тезиса.

Вот три примера:

дело Кронеберга. Реальное уголовное дело о Кронеберге[1], высекшем свою дочь шпицрутенами, наделало много шума в С.-Петербурге. Адвокат Кронеберга, заменив, в частности, тезис *«истязание в течение четверти часа семилетнего ребёнка шпицрутенами»* на тезис *«наказание розгой шустрой девочки … хитрой, испорченной и с затаенными пороками»*, **выиграл дело**. (В его речи было много и других приёмов. Достоевский подробно и скрупулёзно разбирает эту речь.)

перо Риты Скитер. Вовсю пользуется этим приёмом и героиня книг о Гарри Поттере Рита Скитер:
«Проверка... я – Рита Скитер, корреспондент Дневного Оракула.» Как только Рита Скитер договорила, зелёное перо бросилось писать, летая по пергаменту:

«Привлекательная сорока-трёхлетняя блондинка Рита Скитер, чьё яростное перо пронзило множество раздутых репутаций –»

«Дивно,» – сказала Рита Скитер...[2]

---

[1] Ф.М. Достоевский «Дневник писателя» Глава вторая. 1876г.

[2] "Testing... my name is Rita Skeeter, Daily Prophet reporter." The moment Rita Skeeter had spoken, the green quill had started to scribble, skidding across the parchment:
"Attractive blonde Rita Skeeter, forty-three, who's savage quill has punctured many inflated reputations –"
"Lovely," said Rita Skeeter. (J.K. Rowling, Harry Potter and the Goblet of Fire.)

планшет Амбридж. Но не только Рита Скитер владеет этим приёмом:

Нагрид лишь усмехнулся.

«Тэстралы не опасны! Ну да, они могут откусить вам чё-нить, если вы их действительно разозлите...»

«Демонстрирует... признаки... удовольствия... при... мысли... о... насилии,» – бормотала Амбридж, вновь строча на своём планшете.[1]

4. Примеры построения силлогизмов

Пример 4.1. *Построить силлогизмы по паре посылок:*

а) $B \Rightarrow C$ и $A \Rightarrow B$; **б)** $B \Rightarrow C$ и $\neg A \Rightarrow B$; **в)** $B \Rightarrow C$ и $A \Rightarrow \neg B$; **г)** $B \Rightarrow C$ и $\neg A \Rightarrow \neg B$;

д) $B \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow A$; **е)** $B \Rightarrow C$ и $\neg B \Rightarrow A$; **ж)** $B \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow \neg A$; **з)** $B \Rightarrow C$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$;

и) $A \Rightarrow B$ и $C \Rightarrow B$; **к)** $B \Rightarrow \neg C$ и $\mathfrak{I}\neg B \Rightarrow \neg A$.

а) $\underline{B \Rightarrow C \text{ и } A \Rightarrow B}$. Картина здесь выглядит так: все элементы A лежат в B, а все элементы B лежат в C. Нарисовав круги Эйлера, видим, что все элементы A лежат в C.

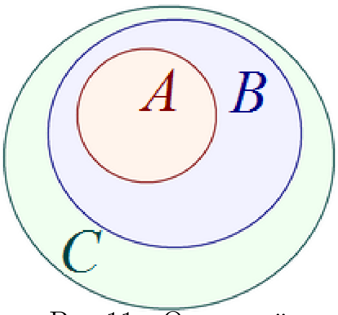


Рис.11. Основной вариант расположения кругов A, B и C.

Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $A \Rightarrow B$ следует вывод: $A \Rightarrow C$.
(Заметим, что этот силлогизм совпадает с силлогизмом структуры (1.1).)

б) $\underline{B \Rightarrow C \text{ и } \neg A \Rightarrow B}$. Если переименовать $\neg A$ в новый термин $\tilde{A}$, получим ситуацию пункта а). Поэтому
Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $\neg A \Rightarrow B$ следует вывод: $\neg A \Rightarrow C$.

в) $\underline{B \Rightarrow C \text{ и } A \Rightarrow \neg B}$. В силу modus tollens, $A \Rightarrow \neg B$ равносильно $\neg(\neg B) \Rightarrow \neg A$. А из закона отрицания отрицания получаем, что вторая посылка равносильна суждению $B \Rightarrow \neg A$. Тут получается ситуация: все элементы B лежат в $\neg A$, и все элементы B лежат в C.

[1]Hagrid merely chuckled.
"Thestrals aren' dangerous! All righ', they might take a bite outta yeh if yeh really annoy them –"
"Shows... signs... of... pleasure... at... idea... of... violence," muttered Umbridge, scribbling on her clipboard again. (J.K. Rowling, Harry Potter and the Order of the Phoenix.)

Рис.12. Возможные варианты расположения кругов A, B и C.

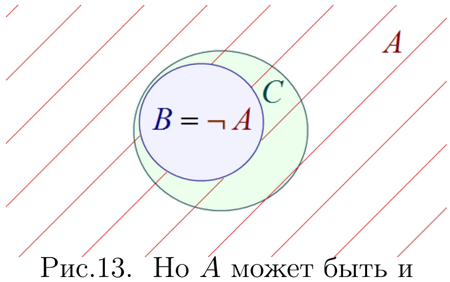


Рис.13. Но A может быть и внешностью круга B.

Единственный вывод, который мы можем в данном случае гарантировать, что множества $\neg A$ и C пересекаются (по крайней мере, по множеству B). В терминологи, принятой для суждений в формальной логике, это записывается так: некоторые элементы $\neg A$ лежат в C (или, что то же самое, некоторые элементы C лежат в $\neg A$). Однако, крайне важно отметить, что так как B – минимальное множество, по которому обязаны пересекаться множества $\neg A$ и C, то слеланный вывод возможен **только при условии, что** $B \neq \varnothing$.

Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $A \Rightarrow \neg B$ следует вывод: $\mathfrak{I}\,\neg A \Rightarrow C$.
$\big($или, иначе $\quad \mathfrak{I}\,C \Rightarrow \neg A\big)$.
(Вывод возможен **только при условии, что** $B \neq \varnothing$**.**)

г) <u>$B \Rightarrow C$ **и** $\neg A \Rightarrow \neg B$.</u> Если переименовать $\neg A$ в новый термин $\tilde{A}$, получим ситуацию пункта в). В силу пункта в) вывод такой: $\mathfrak{I}\,\neg\tilde{A} \Rightarrow C$ или $\mathfrak{I}\,C \Rightarrow \neg\tilde{A}$. Но в силу закона отрицания отрицания

$$\neg\tilde{A} = \neg(\neg A) \equiv A.$$

Поэтому

Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $\neg A \Rightarrow \neg B$ следует вывод: $\mathfrak{I}\,A \Rightarrow C$.
$\big($или, иначе $\quad \mathfrak{I}\,C \Rightarrow A\big)$.
(Вывод возможен **только при условии, что** $B \neq \varnothing$**.**)

д) <u>$B \Rightarrow C$ **и** $B \Rightarrow A$.</u> В силу modus tollens, $B \Rightarrow A$ равносильно $\neg A \Rightarrow \neg B$, и мы получаем в точности условие пункта г).

Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow A$ следует вывод: $\mathfrak{I}\,A \Rightarrow C$.
$\big($или, иначе $\quad \mathfrak{I}\,C \Rightarrow A\big)$.
(Вывод возможен **только при условии, что** $B \neq \varnothing$**.**)

е) <u>$B \Rightarrow C$ **и** $\neg B \Rightarrow A$.</u> В силу modus tollens, $\neg B \Rightarrow A$ равносильно $\neg A \Rightarrow \neg(\neg B)$. А из закона отрицания отрицания получаем, что вторая посылка равносильна суждению $\neg A \Rightarrow B$. И оказывается, что данные посылки совпадают с посылками из пункта б).

Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $\neg A \Rightarrow B$ следует вывод: $\neg A \Rightarrow C$.

ж) <u>$B \Rightarrow C$ **и** $B \Rightarrow \neg A$.</u> В силу modus tollens, $B \Rightarrow \neg A$ равносильно $A \Rightarrow \neg B$. А этот случай уже разобран в примере в).
Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $B \Rightarrow \neg A$ следует вывод: $\mathfrak{I}\, C \Rightarrow \neg A$
$\Big($или, иначе $\quad \mathfrak{I}\, \neg A \Rightarrow C\Big)$.
(Вывод возможен **только при условии, что** $B \neq \varnothing$**.**)

з) <u>$B \Rightarrow C$ **и** $\neg B \Rightarrow \neg A$.</u> В силу modus tollens, $\neg B \Rightarrow \neg A$ равносильно $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$. А из закона отрицания отрицания получаем, что вторая посылка равносильна суждению $A \Rightarrow B$. И оказывается, что данные посылки совпадают с посылками из пункта а).
Ответ: из посылок $B \Rightarrow C$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$ следует вывод: $A \Rightarrow C$.

и) <u>$A \Rightarrow B$ **и** $C \Rightarrow B$.</u> Так как A и C лежат в B (но при этом могут содержать друг друга, пересекаться, либо не пересекаться), то можно сделать вывод только, что внешности кругов A и C имеют общие точки – все точки $\neg B$. Поэтому
Ответ: из посылок $A \Rightarrow B$ и $C \Rightarrow B$ следует вывод: $\mathfrak{I}\, \neg A \Rightarrow \neg C$.
$\Big($или, иначе $\quad \mathfrak{I}\, \neg C \Rightarrow \neg A\Big)$.
(Вывод возможен **только при условии, что** $\neg B \neq \varnothing$**.**)

к) <u>$B \Rightarrow \neg C$ **и** $\mathfrak{I}\, \neg B \Rightarrow \neg A$.</u> Круги B и C не пересекаются, то есть C лежит во внешности B. Из второй посылки знаем, что часть внешности круга B лежит вне A, но не знаем, какая. То есть:
вне A может лежать та часть $\neg B$, которая содержит C;
вне A может лежать та часть $\neg B$, которая содержится в C;
вне A может лежать та часть $\neg B$, которая не пересекается с C;
вне A может лежать та часть $\neg B$, которая пересекается с C;
вне A может лежать та часть $\neg B$, которая совпадает с C.
Поэтому тут совершенно новая ситуация: мы вообще ничего не можем сказать про взаимное расположение кругов A и C. Они могут совпадать, пересекаться, содержать друг друга. Даже не исключён (ни одной посылке не противоречит) случай, когда C есть внешность A. Поэтому
Ответ: из посылок $B \Rightarrow \neg C$ и $\mathfrak{I}\, \neg B \Rightarrow \neg A$ нельзя сделать никакого вывода.

5. Обратные суждения

В математике часто говорят «обратное неверно» или, напротив, доказывают «обратную теорему». Что под этим понимается?

<u>**Опр.**</u> **5.1.** Пусть дано суждение
$$A \Rightarrow B.$$
Тогда **обратным** к нему называется суждение
$$B \Rightarrow A.$$

Важно заметить, что **обратное суждение не совпадает с отрицанием**[1]:

Прямое суждение	Обратное суждение
$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$

Пример 5.1.

Прямое суждение	Обратное суждение
все студенты – двоечники	все двоечники – студенты
все суждения ложны	всё, что ложно, есть суждения
в каждой шутке есть доля правды	всё, в чём есть доля правды, – шутки
всякая селёдка – рыба	всякая рыба – селёдка

6. Необходимое и достаточное

Опр. 6.1. Пусть A и B связаны соотношением

$$A \Rightarrow B.$$

Тогда

- условие B называется **необходимым** условием для A,
- условие A называется **достаточным** условием для B.

Эти понятия многие регулярно путают, хотя их смысл становится совершенно ясен, если привести наглядные примеры.

Пример 6.1.

$$\underbrace{\text{Чтобы летать,}}_{A}\ \underbrace{\text{необходимо}}_{\Rightarrow}\ \underbrace{\text{иметь крылья.}}_{B}$$

Заметим, что иметь крылья не достаточно, чтобы летать. К примеру, пингвины имеют крылья, но не летают. Однако, логика данного судения в том, что если нам известно, что существо летает, мы можем сделать вывод, что оно имеет крылья. А обратное ($B \Rightarrow A$) неверно. Сразу видим, что

суждения «A **достаточно для** B» и «A **необходимо для** B» – обратны друг к другу.

$$\underbrace{\text{Чтобы не падать на ходу,}}_{B}\ \underbrace{\text{достаточно}}_{\Leftarrow}\ \underbrace{\text{всё время сидеть.}}_{A}$$

[1] Построение отрицания – одна из тем следующего семинара.

В то же время, всё время сидеть – далеко не необходимо для того, чтобы не падать.

$$\underbrace{\text{Чтобы жить,}}_{A}\ \underbrace{\text{необходимо}}_{\Rightarrow}\ \underbrace{\text{родиться}}_{B}.$$

Если человек жив, то он когда-то родился. Увы, обратное неверно...

$$\underbrace{\text{Чтобы остановить кровь из носа,}}_{B}\ \underbrace{\text{достаточно}}_{\Leftarrow}\ \underbrace{\text{перекрыть сонную артерию}}_{A}.$$

К счастью, это вовсе не необходимо.

7. Упражнения

Пример 7.1. *Доказать или опровергнуть:*

а) Все люди – братья. Сёстры – не братья. Сёстры – не люди.

б) $A \Rightarrow B$, значит $\neg B \Rightarrow A$.

в) Все параллельные прямые не пересекаются, a и b пересекаются, значит $a \nparallel b$.

г) $A \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow \neg B$, значит $C \Rightarrow \neg A$.

д) Все птицы – позвоночные. Все моллюски – беспозвоночные. Значит, моллюски – не птицы.

е) Все птицы – позвоночные. Все моллюски – не птицы. Значит, моллюски – беспозвоночные.

ж) $A \Rightarrow \neg B, \quad B \Rightarrow A$, значит $B \Rightarrow A$.

з) Вася лучше Коли. Лучшее – враг хорошего. Значит, Вася – враг Коли.

и) Вася – враг Коли. Лучшее – враг хорошего. Значит, Вася лучше Коли.

к) $A \Rightarrow B, \quad C \Rightarrow \neg A$, значит $C \Rightarrow \neg B$.

л)* Если ты никого не боишься, значит ты самый страшный.

м) Бьёт, значит любит. (Русская пословица)

н) Ветер дует, потому что деревья качаются.

о) Люди не летают. Деревья не летают. Значит, люди – деревья.

п) Все студенты – умные. Преподаватели – не студенты. Значит, преподаватели – неумные.

Пример 7.2. *Установить, справедливы ли суждения:*

а) чтобы голова не болела, достаточно её отрубить;

б) чтобы голова не болела, необходимо её отрубить;

в) чтобы перейти на следующий курс, достаточно сдать все экзамены на «3»;

г) чтобы перейти на следующий курс, необходимо сдать все экзамены на «3»;

д) чтобы перейти на следующий курс, достаточно сдать все экзамены на «5»;

е) чтобы перейти на следующий курс, необходимо сдать все экзамены на «5»;

ж) чтобы перейти на следующий курс, достаточно сдать все экзамены;

з) чтобы перейти на следующий курс, необходимо сдать все экзамены;

и) чтобы иметь твёрдые знания, достаточно усердно учиться;

к) чтобы иметь твёрдые знания, необходимо усердно учиться;

л) чтобы быть счастливым, достаточно иметь много денег;

м) чтобы быть счастливым, необходимо иметь много денег;

н) чтобы понимать математику, достаточно научиться логике;

о) чтобы понимать математику, необходимо научиться логике.

Пример 7.3. *Для каждого суждения из примера 7.2 построить обратное.*

Пример 7.4. *Заполнить таблицу силлогизмов:*

Посылки №2 \ №1	$A = B$ B=A	$A \Rightarrow B$ $\neg B \Rightarrow \neg A$	$B \Rightarrow A$ $\neg A \Rightarrow \neg B$	$B \Rightarrow \neg A$ $A \Rightarrow \neg B$	$\neg A \Rightarrow B$ $\neg B \Rightarrow A$	$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow B$ $\mathfrak{I}\, B \Rightarrow A$	$\mathfrak{I}\, \neg A \Rightarrow \neg B$ $\mathfrak{I}\, \neg B \Rightarrow \neg A$	$\mathfrak{I}\, A \Rightarrow \neg B$ $\mathfrak{I}\, \neg B \Rightarrow A$	$\mathfrak{I}\, \neg A \Rightarrow B$ $\mathfrak{I}\, B \Rightarrow \neg A$	$A = \neg B$ $B = \neg A$
$C = B$										
$C \Rightarrow B$										
$B \Rightarrow C$										
$B \Rightarrow \neg C$										
$\neg C \Rightarrow B$										
$\mathfrak{I}\, C \Rightarrow B$										
$\mathfrak{I}\, \neg C \Rightarrow \neg B$										
$\mathfrak{I}\, C \Rightarrow \neg B$										
$\mathfrak{I}\, \neg C \Rightarrow B$										
$C = \neg B$										

Замечание.

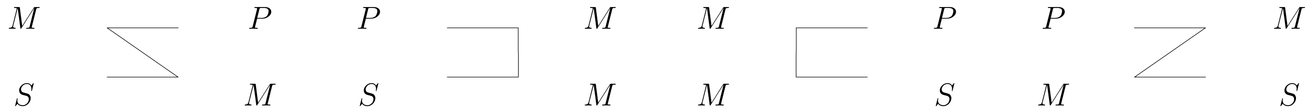
В некоторых ячейках вывод невозможен, а в некоторых возможен только при условии, что $\neg B \neq \emptyset$ или, наоборот, при условии $B \neq \emptyset$.
Закрасить жёлтым цветом ячейки, где вывод возможен только при условии, что $\neg B \neq \emptyset$, и зелёным – те, где необходимо, чтобы $B \neq \emptyset$.

Замечание 7.1. Подобной таблицы в литературе я не встречал, она включает силлогизмы всех 4-х фигур и много силлогизмов, ни к одной фигуре не относящихся.

Тем не менее перечисленные законы и приведённые в таблице силлогизмы далеко не исчерпывают всё богатство формальной логики. Мы не будем рассматривать modus ponendo tollens и modus tollendo ponens, касающиеся «исключающего или» и «включающего или», соответственно, и массу других логических структур.[1]

Пример 7.5. *Термины A, B и C имеют традиционные названия. Первый термин силлогизма называется* **субъектом** *(S), второй термин заключения –* **предикатом** *(P), а термин, встречающийся в обеих посылках и отсутствующий в заключении, называется* **средним термином** *(M). Найти в заполненной в предыдущей задаче таблице ячейки, содержащие классические фигуры силлогизмов:*

1-ая фигура: **2-ая фигура:** **3-я фигура:** **4-ая фигура:**



(Заметим, что в этих схемах символ M может в первой строке (соответствующей первой посылке) обозначать B, а во второй, например, $\neg B$ или $\Im B$. То же относится к терминам S и P.)

Список литературы

[1] **Аристотель** *Аналитики первая и вторая* //М., Госполитиздат, 1952. 438с.

[2] **Брюшинкин В.Н.** *Практический курс логики для гуманитариев* // М., Новая школа, 1996. 320 с.

[3] **Гильберт Д.** *Математическое мышление.*[2] *Статья в сборнике: Методологический анализ оснований математики* // М., Наука, 1988. — стр. 97—104

[4] **Ивин А.А.** *Логика. Учебник для гуманитарных факультетов* // М., ФАИР-ПРЕСС, 2002

[5] **Розенблюм Г.В., Соломяк М.З., Шубин М.А.** *Спектральная теория дифференциальных операторов* // Итоги Науки и Техники ВИНИТИ. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. том 64, 1989, 248 с.

[1] Для справки:
modus ponendo tollens: $(\text{либо } A, \text{ либо } B) \implies (A \Rightarrow \neg B)$,
modus tollendo ponens: $(A \text{ или } B) \implies (\neg B \Rightarrow A)$, см. [2], стр. 197 – 198.

[2] В других переводах «Аксиоматическое мышление».